

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Спектральные методы в теории графов
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	1
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 20.01.2025

## Аннотация

Курс посвящен тому, какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности. Курс будет содержать условно более алгебраические темы (в частности, экспандеры и их построение, sensitivity conjecture, решенная Хуангом, сильно регулярные графы, графы Кэли) и более аналитические (неравенства Чигера и квазислучайность, изображение планарных графов, разрезы и потоки). Часть курса будет посвящена алгоритмическим приложениям. Под конец курса мы обсудим неожиданную связь между алгоритмической задачей о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками, минимальным разрезом и вопросами о приближениях произвольных метрических пространств с помощью метрики  $l_1$ .

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Дать представление о том какую информацию содержит спектр матриц, связанных с графом. Разобраться в разнообразных применениях спектральной техники.

#### Задачи дисциплины

- изучение информации, которую содержит спектр матриц, связанных с графом;
- приобретение слушателями знаний в области спектральной техники.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений с научной аргументацией при анализе объекта научной профессиональной деятельности
	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

владеть:

- навыками решения задач.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)	4	4		6
2	Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа	4	4		6
3	Графы Пэли и Кэли	4	4		6
4	Оценки числа ребер между подмножествами графа.	4	4		6
5	Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши	4	4		6
6	Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью	4	4		6
7	Экспандеры. Теорема Татта	4	4		6
8	Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками	2	2		3
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

###### 1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан)

Спектр, теорема Куранта-Фишера, характеристика второго собственного значения через вадратичную форму.

###### 2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа

Спектр графа Кнезера и вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.

###### 3. Графы Пэли и Кэли

Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр. Графы Кэли.

###### 4. Оценки числа ребер между подмножествами графа.

Еще один вывод теоремы Эрдеша-Ко-Радо. Вероятностный тест на простоту и генерация псевдослучайных чисел. Характеризация квазислучайности.

## 5. Оценки Чигера, теорема Перрона-Фробениуса, Коши

Оценки Чигера. Теорема Перрона-Фробениуса, Теорема Коши о собственных значениях, теорема Вильфа. Решение Хуангом гипотезы о чувствительности (sensitivity conjecture).

## 6. Задача о графах минимального диаметра с заданной степенью

Сильно регулярные графы. Построение контрпримера к гипотезе Борсука с помощью сильно регулярных графов.

## 7. Экспандеры. Теорема Татта

Конструкция экспандеров. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов. Теорема о числе остовных деревьев в графе.

## 8. Задача о максимальном потоке с несколькими источниками и стоками

Двойственная задача, сведение к задаче о метриках на конечном множестве. Приближения конечных метрических пространств с помощью  $l_2$  и  $l_1$ -метрики. Связь между минимальным разрезом и задаче о потоке с несколькими источниками и стоками.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

### Основная литература

1. Элементы дискретной математики в задачах, Электронная версия печатной публикации / А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский [и др.]. — Москва, МЦНМО, 2016
2. Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии / А. М. Райгородский. — Москва: МЦНМО, 2023.

### Дополнительная литература

1. Хроматические числа [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2015 .— 44 с.

## 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

## 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Учебная аудитория.

## 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	<u>1</u>
<b>квалификация:</b>	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен	
<b>Разработчик:</b>	А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий

ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений с научной аргументацией при анализе объекта научной профессиональной деятельности
	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Спектральные методы в теории графов» обучающийся должен:

### знать:

- основные принципы какие свойства графа можно описать в терминах связанных с графом матриц: лапласиана и матрицы смежности;
- графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр;
- оценки числа ребер между подмножествами графа.

### уметь:

- решать задачу о графах минимального диаметра с заданной степенью;
- применять теорему Татта об изображении 3-связных планарных графов.

### владеть:

- навыками решения задач.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Задачи по курсу

1. Найдите спектр цикла на  $n$  вершинах.
2. Пусть  $M$  - это матрица размера  $d \times n$ . Докажите, что мультимножества ненулевых собственных значений матриц  $MM^T$  и  $M^T M$  совпадают.
3. Пусть  $G$  это  $d$ -регулярный граф на  $n$  вершинах, и пусть абсолютная величина всех собственных значений его матрицы смежности, кроме первого, не превосходит  $\lambda$ . Пусть  $N(v)$  - это множество соседей вершины  $v$ , а для данного множества вершин  $B$  размера  $|B| = b$   $NB(v) = N(v) \cap B$ . Докажите, что для любого множества вершин  $B$  имеем:  

$$\sum_{v \in V} |NB(v) - bd| \leq \lambda^2 b(1 - b)n$$

## 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Графы и матрицы (матрица смежности, Лапласиан.



2. Теорема Хоффмана об оценке числа независимости графа.
3. Теорема Эрдеша-Ко-Радо о максимальном размере пересекающегося семейства.
4. Графы Пэли, обобщенный гиперкуб и его спектр.
5. Графы Кэли.
6. Теорема Перрона-Фробениуса.
7. Теорема Коши о собственных значениях.
8. Теорема Вильфа.
9. Характеризация и другие спектральные свойства реберных графов.
10. Характеризация графа с помощью его спектра

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Графы Кэли.
2. Найдите спектр цикла на  $n$  вершинах.

Билет №2

1. Экспандеры и их конструкция.
2. Теорема Татта об изображении 3-связных планарных графов.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

**5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.